16165

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1993 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1993

(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය II
(02) Applied Mathematics II

02
S II

පැය තුනයි / Three hours

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) v යනු x හි ශ්‍රිතයක් විට $y = \frac{v}{x}$ ආදේශය මඟින්

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^3$$

අවකල සමීකරණයේ විසඳුම

$$x^2 e^{\frac{1}{x^2y^2}} = \text{නියතයක්}$$

යන ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

(ආ) Oxy - තලයේ පිහිටි වක්‍රයක් කෙසේ ද යත් එය $(1, 1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අතර වක්‍රයේ එක් එක් (x, y) ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශක රේඛාවට, $2xy^2$ යන y - අන්තඛණ්ඩයක් තිබෙන පරිදි ය. වක්‍රයේ සමීකරණය සොයන්න.

2 (අ) AB සරල රේඛාවේ චලනය වන අංශුවක් $\overrightarrow{AB}$ දිශාව ඔස්සේ $t = 0$ වේලාවේ දී A ලක්ෂ්‍යයෙන් ආරම්භ වෙයි. u හා f යනු ධන නියත විට t වේලාවේ දී අංශුවේ ප්‍රවේගය,

$$v(t) = u - ft \text{ වේ.}$$

අංශුව, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ දිශා ඔස්සේ B ලක්ෂ්‍යය හරහා යන්නේ පිළිවෙළින් t_1, t_2 වේලාවල දිය. ප්‍රවේග-කාල වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(i) $\frac{t_1 + t_2}{2}$ වේලාවේ දී, ප්‍රවේගය ශූන්‍යය වන බවත්

(ii) $\frac{u}{f} < t_2 < \frac{2u}{f}$ බවත්

පෙන්වන්න.

(ආ) අංශුවක්, $t = 0$ වේලාවේ දී පොළොවේ සිට u ප්‍රවේගයකින් සිරස් ලෙස ඉහළට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබෙයි. අංශුවත් පොළොවත් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $e\ (< 1)$ නම්, සියලු ම $t > 0$ සඳහා අංශුවේ චලිතයෙහි ප්‍රවේග-කාල වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න. නිශ්චලතාවට ඒමට පෙර අංශුව ගමන් කළ මුළු දුර සොයන්න.

3. සරල රේඛාවක් ඔස්සේ v වේගයෙන් චලනය වන අංශුවක් t වේලාවේ දී ඒකක ස්කන්ධයට kv^n $(n > 2)$ ප්‍රතිරෝධයකට භාජනය කෙරෙයි. මෙහි k යනු ධන නියතයකි.

$$x = \frac{v^{2-n} - u^{2-n}}{k(n-2)}$$

යනු t වේලාවේ දී අංශුව ගමන් කළ දුර ද u යනු $t = 0$ වේලාවේ දී වේගය ද නම්, අංශුව මත ක්‍රියා කරන එක ම බලය ප්‍රතිරෝධය පමණක් බව සාධනය කරන්න.

$$t = \frac{1}{(n-1)ku^{n-1}}\left[\left(1 + (n-2)\,kxu^{n-2}\right)^{\left(\frac{n-1}{n-2}\right)} - 1\right]$$

බව පෙන්වන්න.

4. (අ) පිතිකරුවෙක් W කඩුල්ලේ ද පන්දු රකින්නෙක් ඈත පිටියේ F ලක්ෂ්‍යයේ ද සිටිති. පිතිකරුවා පහර දුන් පන්දුවක් $\overrightarrow{WF}$ සමඟ α කෝණයක් සාදන තිරස් දිශාවකට ගමන් කරන්නේ, පන්දු රකින්නාට දුවන්නට හැකි වේගය මෙන් $1\frac{1}{2}$ ක වේගයකිනි. පන්දුව හැකි ඉක්මනින් රැක ගැනීම සඳහා පන්දු රකින්නා එක වරට ම තම ඉහළ ම වේගයෙන් දුවන්නට පටන් ගතහොත් ඔහු දිවිය යුතු දිශාව සොයන්න. පන්දුව, පොළොවට සමාන්තර ලෙස නියත ප්‍රවේගයෙන් තිරස් ලෙස ගමන් කරන්නේ යැයි උපකල්පනය කරන්න. පන්දු රකින්නා එසේ කිරීමේ දී මීටර s දුරක් දිව ගියේ නම්, $\alpha < \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ විට

$$\left|\overrightarrow{WF}\right| = \text{මීටර } \frac{s}{2}\left[\sqrt{4 - 9\sin^2\alpha} + 3\cos\alpha\right]$$

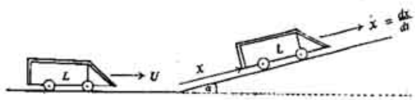
බව පෙන්වන්න.

(ආ) A හා B විස් බෝල දෙකක්, එක ම නියත ω කෝණික ප්‍රවේගයක් ඇති ව සුමට තිරස් වෘත්තාකාර ඇලියක ගමන් කරයි. ඕනෑ ම මොහොතක දී AB ජ්‍යායේ කෝණික ප්‍රවේගය සොයන්න.

5 ස්කන්ධය M kg වන L මෝටර් ලොරියක් H kW නියත ශීඝ්‍රතාවකින් ක්‍රියා කරමින්, $U\ \mathrm{ms^{-1}}$ නියත වේගයක් ඇති ව සරල තිරස් පාරක ගමන් කරයි. චලිතයට ප්‍රතිරෝධය R kg බර වේ. ලොරිය ඊළඟට තිරසට α ආනතියක් සහිත කන්දක පාමුලට (රූපය බලන්න) පැමිණෙයි. ගුරුත්වය හැරුණු විට පාරේ එම කොටසේ චලිතයට ප්‍රතිරෝධය $S\ (> R)$ kg බර වේ. කිසියම් වේලාවකට පසු කඳු සහිත පාරේ දී ලොරිය $V\ \mathrm{ms^{-1}}$ නියත වේගයක් ලබා ගනියි. එවිට ලොරිය ක්‍රියා කරන ශීඝ්‍රතාව නැවතත් H kW ට සමාන වෙයි. $S = 2M\sin\alpha$ බව දී තිබෙයි නම්

$$V = \left(\frac{1000\,H}{3Mg}\right)\operatorname{cosec}\alpha$$

බව පෙන්වන්න.



මීටර d දුරක් පුරා, වේගය U සිට V තෙක් විචලනය වන විට P ප්‍රකර්ෂණ බලය, එහි මුල් නියත අගයේ සිට ඊළඟ නියත අගය තෙක්, $x\ (< d)$ දුර සමඟ ඒකාකාර ලෙස විචලනය වෙයි. P සොයා

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{3S}{2} - R\right)\left(\frac{x}{d} - 1\right)g$$

අවකල සමීකරණය ලබා-ගන්න.

6 M ස්කන්ධයෙන් ද $\alpha\ \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ ආනතියෙන් ද යුත් සුමට කුඤ්ඤයකට එහි දාරයට ලම්බ දිශාවක් ඔස්සේ සුමට තිරස් තලයක චලනය වීමට නිදහස ඇත. ස්කන්ධය kM $(k \geq 1)$ වූ අංශුවක් V ප්‍රවේගයෙන් කුඤ්ඤයෙහි මුහුණතේ කෙළින් ම ඉහළට ප්‍රක්ෂේපණය කරනු ලැබෙයි. අංශුවේ චලිතය, ආනත මුහුණතේ වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව දිගේ සිදු වෙතැ යි උපකල්පනය කරමින්, ඕනෑ ම මොහොතක දී කුඤ්ඤයත් අංශුවත් අතර R ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. අංශුව T කාලයේ දී ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍යය වෙත ආපසු පැමිණෙයි නම්,

$$T = \frac{2V}{g(1+k)}\left(\frac{1 + k\sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්,

$$T \geq \frac{4V}{g}\left(\frac{1}{k^{\frac{1}{2}} + k^{-\frac{1}{2}}}\right)$$

බව අපෝහනය කරන්න.

7. අරය a ද කේන්ද්‍රය O ද වන අචල ගෝලීය කබොලක සුමට ඇතුළු පෘෂ්ඨය මතට A ලක්ෂ්‍යයේ සිට P අංශුව හෙළනු ලැබෙයි. අංශුව, අනුයාත වශයෙන් B, B' ලක්ෂ්‍ය දෙකේ දී කබොලේ ගැටෙයි. මෙහි BB' තිරස් ය. ඉන්පසු අංශුව සිරස් ලෙස උඩු අතට චලනය වී කබොලේ A' ලක්ෂ්‍යයට පැමිණෙයි. AA' ට BB' සමාන්තර වේ. ගැටුම් කේවල ප්‍රත්‍යාස්ථයි. සිරසට OA හි θ ආනතිය,

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{4}(1+\sqrt{2})$$

යන්නෙන් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

P ගේ චලිතය ආවර්තක බව පෙන්වා එහි කාලාවර්තය සොයන්න.

8 ගුරුත්වය යටතේ සිරස් ලෙස වැටෙන කුඩා අරයකින් යුත් ඒකාකාර ගෝලීය වීක් බෝලයක්, තල මුහුණත සුමට විශාල තිරස් බිමක පිහිටා නිසල ව තිබෙන a අරයෙන් යුත් ඒකාකාර ඝන සුමට අර්ධ-ගෝලයක් මතට වැටෙයි. අර්ධ-ගෝලයේ ස්කන්ධය වීක් බෝලයේ ස්කන්ධය මෙන් දෙගුණයකි. සංඝට්ටනය කේවල ප්‍රත්‍යාස්ථයි. ගැටුම් මොහොතේ දී කේන්ද්‍ර රේඛාව උඩු සිරස සමග $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ කෝණයක් සාදයි. ගැටුමට මොහොතකට පෙර වීක් බෝලයේ වේගය u ය.

(i) අර්ධ-ගෝලය සමග ගැටීමෙන් මොහොතකට පසු වීක් බෝලයෙහි ප්‍රවේගයේ සිරස් සංරචකය අතුරුදහන් වන බව පෙන්වන්න.

(ii) වීක් බෝලයත් බිමත් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $e(<1)$ නම්, වීක් බෝලය බිමත් සමග පළමු ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු බෝලයෙහි ප්‍රවේගයේ තිරස් හා සිරස් සංරචක පිළිවෙළින්

$$u\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{ද} \quad e\left[2ag\sqrt{\frac{3}{5}}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{ද}$$

බව පෙන්වන්න.

ඒ හයින්, කිසියම් වේලාවකට පසුව වීක් බෝලයේ ප්‍රවේගයේ සිරස් සංරචකය යළිත් වරක් අතුරුදහන් වන බව පෙන්වන්න.

9. ස්කන්ධය m වූ බර අංශුවක්, ස්වාභාවික දිග l වන ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට ගැට ගසා තිබෙයි. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර A හි දී අචල ව තබා ඇත. A හි සිට මුදා හරිනු ලබන අංශුව ගුරුත්වය යටතේ වැටෙයි. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය λmg නම්, චලිතයෙන් කොටසක්,

$$\frac{l}{\lambda}[1+2\lambda]^{\frac{1}{2}}$$

විස්තාරය සහිත සරල අනුවර්තී චලිතයක් බව පෙන්වන්න.

තව ද,
$$\sqrt{\frac{8l}{g}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{2l}}\left(\pi-\tan^{-1}\sqrt{2\lambda}\right)\right]$$
කාලයක දී අංශුව, A ලක්ෂ්‍යයට නැවත පැමිණෙන බව සාධනය කරන්න.

10 එක එකක ස්කන්ධය m වන A, B, C, D යන සමාන අංශු හතරක්, සමාන අවිතන්‍ය ලුහු තන්තු හතරකින් සම්බන්ධ කර තිබෙයි. තන්තු, පාද වශයෙන් ඇති රොම්බසයක කොන්වල වූ අංශු මේසයක් මත තබා ඇත. BAD කෝණය $= 2\alpha$. A අංශුවට CA විකර්ණය ඔස්සේ පිටි අතට වූ I ආවේගයක් ලැබෙයි. CA හා BD විකර්ණවලට සමාන්තර B ගේ ආරම්භ ප්‍රවේගයේ සංරචක පිළිවෙළින් u ද v ද වෙයි.

$$u = \frac{I}{4m} \quad \text{බව ද} \qquad v = \frac{I}{4m}\sin 2\alpha \quad \text{බව ද}$$

පෙන්වන්න.

ඒ හයින්, එක් එක් තන්තුවේ ආවේගී ආතතිය සොයන්න.

11. දුම්රිය එන්ජිමක්, b පලලින් යුත් රේල් පාරක වෘත්තාකාර වංගුවක V නියත වේගයෙන් ගමන් කරයි. එන්ජිමේ G කේන්ද්‍රකයෙන්, r අරයෙන් යුත් තිරස් වෘත්තයක් සලකුණු වෙයි. රේල් පීලි මත පාර්ශ්වික තෙරපුම අහිගුනා කිරීමට ඇතුළත රේල් පීල්ලට වඩා $\dfrac{bV^2}{\sqrt{V^4 + g^2r^2}}$ උසකට පිටත රේල් පීල්ල එසවිය යුතු බව පෙන්වන්න.

එන්ජිම, ඉහත වෘත්තාකාර රේල් පාරේ V_1 $(< V)$ නියත වේගයෙන් ගමන් කරන විට පීලි මත පාර්ශ්වික තෙරපුම $\mathbf{F}_1$ වේ. නියත වේගය V_2 $(> V)$ වන විට පීලි මත පාර්ශ්වික තෙරපුම $\mathbf{F}_2$ වේ. එන්ජිමේ ස්කන්ධය M වෙයි නම් $\mathbf{F}_1$ හා $\mathbf{F}_2$ සොයන්න. මෙම අවස්ථා දෙකේ දී පාර්ශ්වික තෙරපුමේ විශාලත්වය සමාන වන විට

$$V > (V_1V_2)^{\frac{1}{2}}$$

බව අපෝහනය කරන්න.

12. ස්කන්ධය m ද අරය a ද වන ඒකාකාර වෘත්ත තැටියක හැඩයෙන් යුත් කප්පියක, එහි තලයට ලම්බ කප්පියේ කේන්ද්‍රය හරහා යන අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය $\dfrac{ma^2}{2}$ බව පෙන්වන්න.

යුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙ කෙළවරට $\dfrac{3}{4}m$ හා $\dfrac{1}{4}m$ ස්කන්ධ දෙක ඈඳ තිබෙයි. අචල අක්ෂය වටා සිරස් තලයක භ්‍රමණය වීමට නිදහස ඇති කප්පිය උඩින් තන්තුව යවා ඇත. කප්පිය මත තන්තුව ලිස්සා නොයයි. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යොද ගනිමින්

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{2g}{3a}\right)\theta$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි θ යනු t කාලයේ දී කප්පිය හැරුණු කෝණයයි.

තන්තුවේ සිරස් කොටස් දෙකේ ආතති ද, අක්ෂයේ දී ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න.